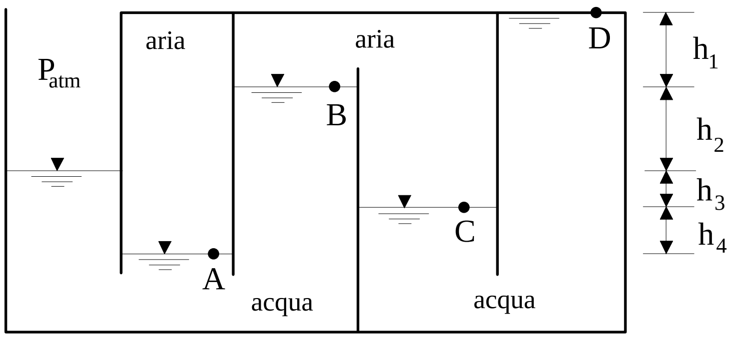
Esercizio N.1

Un serbatoio contiene acqua ed aria come nello schema riportato nella figura. Assumendo il sistema in condizioni d'equilibrio statico, calcolare il valore della pressione nei punti A, B, C e D. Dati: h_1=1 m, h_2=1, h_3=0.4 m, h_4=0.5 m.



Essendo il sistema in condizioni di equilibrio, ogni piano orizzontale, all'interno di uno stesso fluido o in corrispondenza di una superficie di separazione, è un piano isobarico. Nota la pressione agente sulla superficie di separazione acqua-atmosfera nel compartimento di sinistra (pari a zero, considerando la pressione relativa), si ricava il valore della pressione in corrispondenza degli altri punti tramite la legge di Stevino. Nel punto A si ha:

$$p_A = \gamma(h_3 + h_4) = 8829 \text{ Pa}$$

mentre in B:

$$p_B = \gamma h_2 = -9810 \text{ Pa}$$

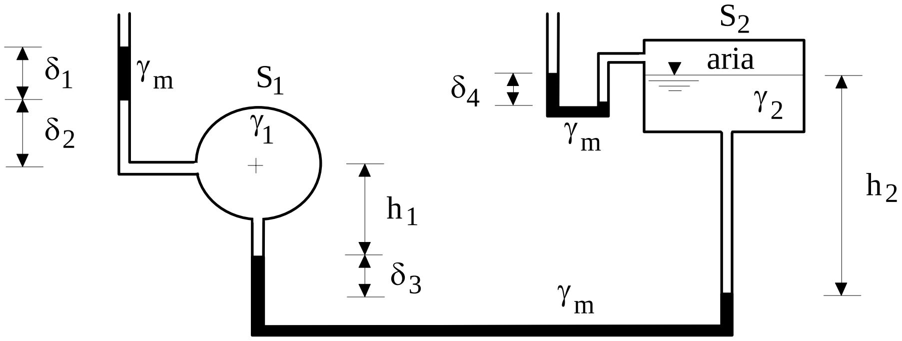
Potendo trascurare il peso specifico dell'aria ($\sim 11.8 \text{ Nm}^{-3}$) rispetto a quello dell'acqua, la pressione nel punto C può essere confusa con quella agente in B. Pertanto:

$$p_C = p_B$$

$$p_D = p_C - \gamma(h_1 + h_2 + h_3) = -33354 \text{ Pa}$$

Esercizio N.2

Noto il dislivello δ_4 misurato nel manometro collegato al serbatoio S_2, calcolare, in condizioni di equilibrio statico, il dislivello δ_1 del manometro collegato al serbatoio S_1. Dati:, γ_1=11000 Nm^{-3}, γ_2=7500 Nm^{-3}, γ_m=50000 Nm^{-3}, δ_2=0.3 m, $\delta_3 = 0.15$ m, δ_4=0.6 m, $h_1 = 0.7$ m, $h_2 = 1.5$ m.



Noto il dislivello δ_4 si può calcolare la pressione p agente sulla superficie libera nel serbatoio S_2:

$$p = \gamma_m \delta_4 = 30000 \text{ Pa}$$

La p è legata alla pressione (nulla) agente sul menisco del manometro alloggiato nel serbatoio S_1 tramite la relazione:

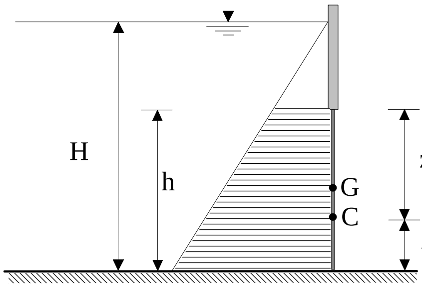
$$0 = p + \gamma_2 h_2 - \gamma_m \delta_3 - \gamma_1 (h_1 + \delta_2) - \gamma_m \delta_1$$

Risolvendo rispetto a δ_1 si ottiene:

$$\delta_1 = \frac{p + \gamma_2 h_2 - \gamma_m \delta_3 - \gamma_1 (h_1 + \delta_2)}{\gamma_m} = 0.46 \text{ m}$$

Esercizio N.3

Un serbatoio largo L contenente acqua è chiuso lateralmente da una paratoia verticale alta h. Calcolare, in condizioni di equilibrio statico, il modulo ed il punto di applicazione della spinta **F** agente sulla paratoia. Dati: L=1 m, H=3 m, h=2 m.



Indicato con $\zeta_G = (H - h/2)$ l'affondamento del baricentro della paratoia, si ottiene:

$$F = \gamma S \zeta_G = 39240\ \text{N}$$

dove $S = Lh = 2\ \text{m}^2$ è la superficie della paratoia. In alternativa, lo stesso valore può essere ottenuto mediante il solido di spinta, cioè il solido, largo L, che ha per base il trapezio tratteggiato in figura. Tale trapezio ha come base minore e maggiore rispettivamente la quantità $p_1 = \gamma(H - h)$ e $p_2 = \gamma H$. Calcolando il volume del solido si ottiene il modulo della spinta:

$$F = \frac{p_1 + p_2}{2} hL = 39240\ \text{N}$$

La forza **F** è diretta perpendicolarmente alla superficie sulla quale agisce ed è applicata nel centro di spinta localizzato nel punto di coordinate (L/2, ζ_C), rispettivamente lungo la direzione trasversale e verticale. L'affondamento ζ_C può essere determinato applicando la teoria generale delle paratoie piane, che porge $\zeta_C = \zeta_G + I/S\zeta_G$, dove I è il momento d'inerzia della superficie della paratoia calcolato rispetto alla retta di sponda. Ricordando che per un rettangolo di base L ed altezza h il momento d'inerzia è pari a $I = (Lh^3)/12$, si ottiene:

$$\zeta_C = 2.17\ \text{m}$$

Le coordinate del centro di spinta possono anche essere calcolate valutando il baricentro del solido di spinta. In questo caso l'affondamento è pari a $\zeta_C = (H - h) + z_1$, dove:

$$z_1 = \frac{h}{3}\frac{a + 2b}{a + b} \qquad z_2 = \frac{h}{3}\frac{2a + b}{a + b}$$

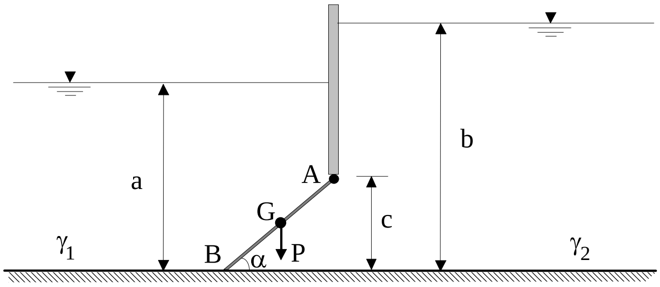
mentre il segmento z_2 (vedi Figura) è pari a:

$$z_2 = \frac{h}{3}\frac{2a+b}{a+b}$$

Le quantità a e b rappresentano, rispettivamente, la base minore $\gamma(H-h)$ e la base maggiore γH del trapezio.

Esercizio N.4

Con riferimento alla figura, determinare il modulo del peso **P** della paratoia AB, incernierata in A, affinché questa resti chiusa sotto l'azione dei liquidi contenuti nei due serbatoi. Dati: a=3 m, b=4 m, c=2 m, α=45°, γ_1=8830 Nm^{-3}, γ_2=9810 Nm^{-3}.



La paratoia inizia ad aprirsi quando il momento rispetto alla cerniera A della forza idrostatica associata al fluido nel serbatoio di destra (liquido 1) è maggiore della somma degli analoghi momenti relativi alla forza idrostatica del fluido di sinistra (liquido 2) ed alla forza peso. La spinta dei liquidi 1 e 2, assunta unitaria la larghezza dei serbatoi, è pari a:

$$S_1 = \frac{\zeta_{A1} + \zeta_{B1}}{2}\gamma_1 \frac{c}{\sin\alpha} = 49950.0 \text{ N} \qquad\qquad S_2 = \frac{\zeta_{A2} + \zeta_{B2}}{2}\gamma_2 \frac{c}{\sin\alpha} = 83240.6 \text{ N}$$

dove i pedici 1 e 2 che compaiono negli affondamenti fanno riferimento ai due diversi serbatoi:

$$\zeta_{A1} = a - c \qquad \zeta_{B1} = a \qquad \zeta_{A2} = b - c \qquad \zeta_{B1} = b$$

Le spinte sono normali alla paratoia e dirette in verso tra loro opposto. Indicato con x l'asse cartesiano coincidente con la paratoia ed assunto il punto A corrispondente con la cerniera l'origine di tale asse, le ascisse dei centri di spinta delle due forze risultano:

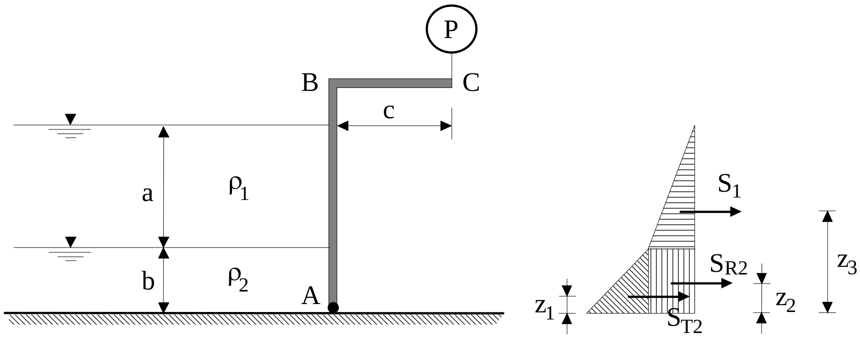
$$x_{c1} = \frac{1}{3}\frac{c}{\sin\alpha}\frac{(a-c)+2a}{(a-c)+a} = 1.65\,\text{m} \qquad x_{c2} = \frac{1}{3}\frac{c}{\sin\alpha}\frac{(b-c)+2b}{(b-c)+b} = 1.57\text{ m}$$

Assunto positivo il segno dei momenti antiorari M_i, la condizione di equilibrio porge:

$$\sum_{i=1,3} M_i = S_1 x_{c1} + P\frac{c}{2} - S_2 x_{c2} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad P = \frac{2}{c}\left(S_2 x_{c2} - S_1 x_{c1}\right) = 48270.2 \text{ N}$$

Esercizio N.5

La paratoia ABC è incernierata lungo l'asse passante per A. Calcolare il volume V del pallone P applicato in C affinché la paratoia risulti in equilibrio sotto l'azione dei due fluidi non miscibili contenuti nel serbatoio. Si assuma trascurabile il peso del pallone e del gas in esso contenuto ed unitaria la larghezza della paratoia. Dati: a=0.3 m, b=0.15 m, c=2 m, ρ_1=300 Kg m^{-3}, ρ_2=400 Kg m^{-3}, ρ_{aria} = 1.2 Kg m^{-3}.



A causa della disomogeneità dei fluidi contenuti nel serbatoio non è possibile procedere nel modo canonico. Un possibile procedimento consiste nella valutazione delle spinte associate ai tre solidi di spinta riportati nella figura, ognuna delle quali applicata nel baricentro del relativo solido. Si ha:

$$S_1 = \frac{1}{2}a(\gamma_1 a) = 132.4\ \text{N} \qquad S_{R2} = b(\gamma_1 a) = 132.4\ \text{N} \qquad S_{T2} = \frac{1}{2}b(\gamma_1 b) = 44.2\ \text{N}$$

dove $\gamma = \rho g$ (si noti come la spinta S_{R2} è stata valutata considerando il peso specifico del fluido 1). L'equilibrio alla rotazione della paratoia impone l'annullamento della sommatoria dei momenti delle forze agenti calcolati rispetto alla cerniera A. I bracci delle spinte idrostatiche rispetto ad A valgono (vedi figura):

$$z_1 = \frac{1}{3}b = 0.05\,\text{m} \qquad z_2 = \frac{1}{2}b = 0.075\,\text{m} \qquad z_3 = b + \frac{1}{3}a = 0.25\,\text{m}$$

Indicata con S_P la spinta di Archimede agente sul pallone ed assunto positivo il segno dei momenti antiorari, l'equilibrio dei momenti porge:

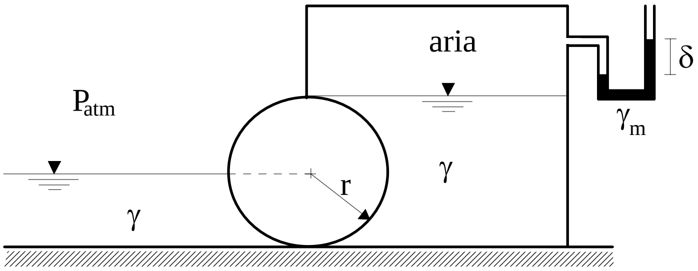
$$\sum_{i=1,4} M_i = S_P c - S_1 z_3 - S_{R2} z_2 - S_{T2} z_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad S_P = 27.6\ \text{N}$$

Il volume V del pallone è quindi:

$$V = \frac{S_P}{\rho_{aria}\, g} = 2.3\,\text{m}^3$$

Esercizio N.6

Nota l’indicazione del manometro semplice a mercurio collegato al serbatoio, determinare la spinta agente sulla paratoia cilindrica a sezione circolare, di larghezza unitaria, rappresentata in figura. Dati: r=1 m; δ=0.18 m, γ=9810 Nm^{-3}; γ_m=133300 Nm^{-3}.



Le spinte sulle superfici curve possono essere determinate calcolando separatamente le proiezioni orizzontali e verticali. Nel caso in esame, la componente orizzontale S_{OS} dovuta al fluido agente a sinistra della paratoia può essere valutata mediante il solido di spinta, di base triangolare, ottenuto proiettando il quarto di circonferenza a contatto col liquido lungo un piano verticale. Assunte positive le spinte dirette verso destra, si ottiene:

$$S_{OS} = \frac{1}{2} r^2 \gamma = 4905 \text{ N}$$

La componente orizzontale S_{OD} associata al fluido di destra si calcola in modo analogo, salvo tenere conto della pressione $P_a = \gamma_m \delta$ dell’aria sovrastante la superficie libera del liquido nel serbatoio. In questo caso, quindi, il solido di spinta ha base trapezoidale, con base minore e maggiore pari rispettivamente a P_a e $P_a + \gamma r$:

$$S_{OS} = \frac{P_a + (P_a + \gamma r)}{2} r = -67608 \text{ N}$$

La spinta orizzontale risultante S_O è quindi:

$$S_O = S_{OS} + S_{OD} = -62703.0 \text{ N}$$

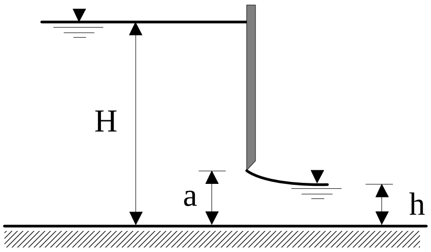
La spinta verticale S_V è diretta verso l’alto ed è pari al peso del fluido spostato dalla paratoia:

$$S_V = \frac{3}{4}(\pi r^2)\gamma = 23102.6 \text{ N}$$

La spinta risultante, di modulo $S = \sqrt{S_O^2 + S_V^2} = 66823.6 \text{ N}$, passa per l’asse del cilindro, dal momento che le pressioni, normali alla superficie cilindrica, sono tutte dirette verso tale asse.

Esercizio N.7

Calcolare l'altezza a di apertura della luce di fondo, larga b, con coefficiente di contrazione C_c, affinché il serbatoio scarichi la portata Q. Assumere la profondità H del serbatoio costante nel tempo. Dati: H=3 m, Q=1.5 m^3s^{-1}, b=2 m, C_c=0.61.



Assumendo trascurabili le perdite di carico dovute all'attrito, il teorema di Bernoulli applicato tra una generica sezione a monte della luce e la sezione contratta profonda h, dove la corrente può assumersi uniforme, si scrive:

$$H = h + \frac{U^2}{2g} = h + \frac{Q^2}{2gb^2h^2}$$

dove è stata applicata l'equazione di continuità Q=US=U(bh)=cost. Risolvendo per tentativi si ottiene:

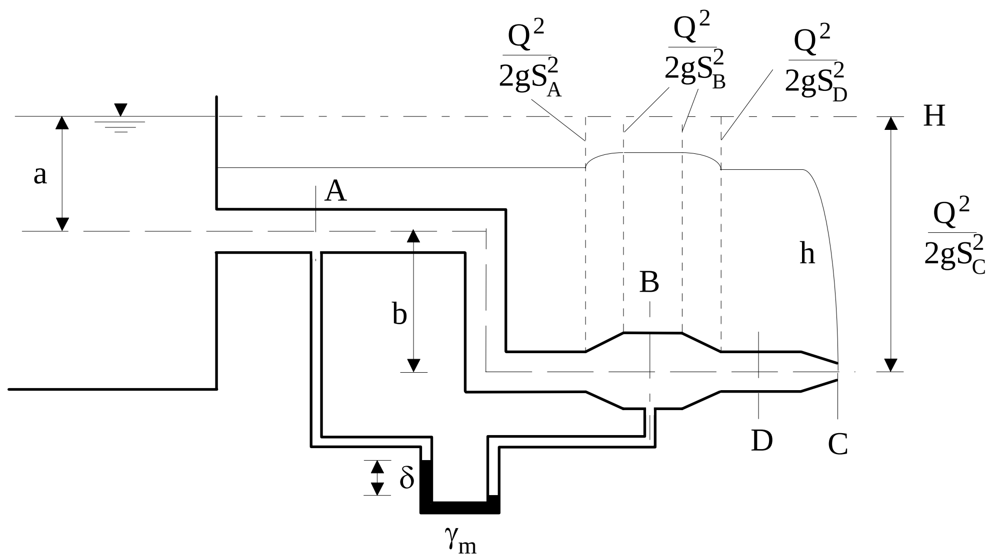
$$h = 0.10\,\mathrm{m}$$

per cui la luce di fondo è pari a:

$$a = \frac{h}{C_c} = 0.16\,\mathrm{m}$$

Esercizio N.8

Nell'ipotesi di fluido perfetto e moto stazionario, calcolare la portata ed il battente a del sistema riportato nella figura. Dati: D_A=D_D=0.1 m, D_B=0.12 m, D_C=0.07 m, b=5 m, γ_m=133300 Nm^{-3}, δ=8 cm.



Le ipotesi del problema consentono di applicare il teorema di Bernoulli nella forma canonica H=cost. In particolare, tra le sezioni A e B si scrive:

$$H_A = H_B \quad \Rightarrow \quad h_A + \frac{U_A^2}{2g} = h_B + \frac{U_B^2}{2g}$$

Applicando l'equazione di continuità e la formula del manometro differenziale si ottiene:

$$\frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{S_A^2} - \frac{1}{S_B^2}\right) = h_B - h_A = \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}\delta \quad \Rightarrow \quad Q = 0.048\,m^3s^{-1}$$

dove $S_A = \pi D_A^2/4$, $S_B = \pi D_B^2/4$. Il dislivello a si calcola ricorrendo all'espressione della velocità Torricelliana. Infatti, poiché $U_C = \sqrt{2gH}$ e $S_C = \pi D_C^2/4$, si ottiene:

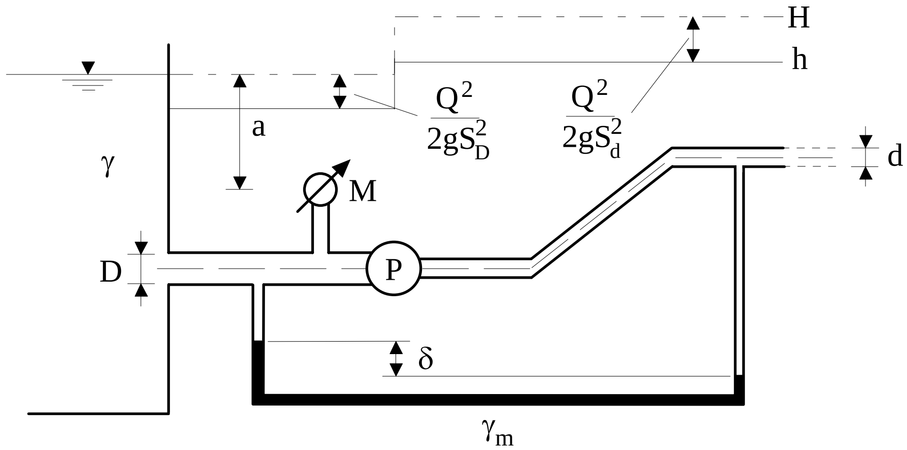
$$Q = S_C U_C = S_C\sqrt{2gH} \quad \Rightarrow \quad H = a + b = \frac{Q^2}{2gS_C^2} = 8.13\,m \quad \Rightarrow \quad a = H - b = 3.13\,m$$

La linea dei carichi totali (punto-tratto nella figura) è una retta orizzontale posta alla stessa quota della superficie libera del serbatoio. La linea piezometrica (continua) si può tracciare sottraendo nelle varie sezioni il valore dell'altezza cinetica. Si ha:

$$\frac{Q^2}{2gS_A^2} = \frac{Q^2}{2gS_D^2} = 1.90\,m \qquad ; \qquad \frac{Q^2}{2gS_B^2} = 0.92\,m$$

Esercizio N.9

Nell'ipotesi di fluido perfetto e moto stazionario, determinare la prevalenza della pompa P del sistema rappresentato nella figura. Dati: $\gamma = 12258$ N m^{-3}, D=0.25 m, d=0.20 m, a=7 m, P_M=0.78 atm, δ=1.80 m, $\gamma_m = 133300$ N m^{-3}.



Il teorema di Bernoulli applicato tra il serbatoio e la sezione in cui è collegato il manometro permette il calcolo della portata fluente nella condotta. Indicando con z_M il dislivello (incognito) tra l'asse della condotta di diametro D ed il manometro, si scrive:

$$a + z_M = z_M + \frac{P_M}{\gamma} + \frac{Q^2}{2gS_D^2}$$

dove $S_D = \pi D^2/4$. Nella precedente espressione l'unica incognita è la portata Q. Poiché $1\,\text{atm} = 101325\,\text{Pa}$, si ha:

$$Q = S_D\sqrt{2g\left(a - \frac{P_M}{\gamma}\right)} = 0.16\,\text{m}^3\text{s}^{-1}$$

La prevalenza H_P della pompa si ottiene come differenza tra il carico totale a monte e a valle della pompa stessa. Posto $S_d = \pi d^2/4$, ne segue:

$$H_P = H_V - H_M = h_V + \frac{Q^2}{2gS_d^2} - h_M - \frac{Q^2}{2gS_D^2} = \Delta h + \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{S_d^2} - \frac{1}{S_D^2}\right)$$

La differenza del carico piezometrico può essere valutata col manometro differenziale:

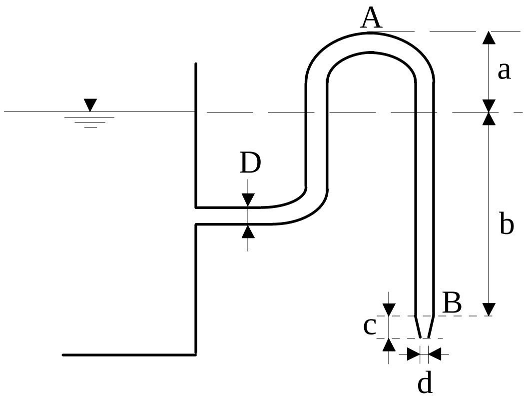
$$\Delta h = \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}\delta = 17.77\,\text{m}$$

e quindi:

$$H_P = 17.78 + 0.78 = 18.56\,\text{m}$$

Esercizio N.10

Nell'ipotesi di fluido perfetto e moto stazionario, calcolare la portata d'acqua scaricata dal sifone ed il valore della pressione nei punti A e B. Dati: D=0.20 m, d=0.10 m, a=3.5 m, b=5.5 m, c=0.40 m.



Le ipotesi del problema consentono di calcolare la portata mediante il teorema di Bernoulli. Considerando il serbatoio e la sezione terminale del bocchello, ove la pressione è nulla, ed assumendo come piano di riferimento dei carichi quello passante per la sezione terminale, si ottiene:

$$H = b + c = \frac{Q^2}{2gS_d^2} \qquad \Rightarrow \qquad Q = 0.08\,m^3s^{-1}$$

dove $S_d = \pi d^2 / 4$.

La pressione in B si ottiene dalla costanza del carico H tra la sezione di sbocco e la sezione B. Quindi:

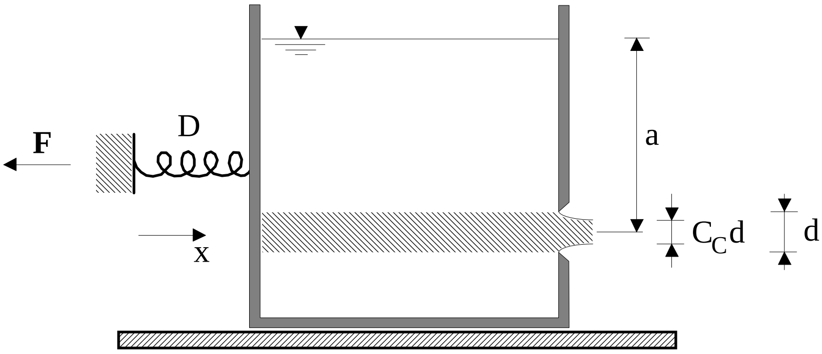
$$\frac{Q^2}{2gS_d^2} = c + \frac{P_B}{\gamma} + \frac{Q^2}{2gS_D^2} \qquad \Rightarrow \qquad P_B = 50532.57\ \text{Pa}$$

In maniera analoga si valuta la pressione in A:

$$\frac{Q^2}{2gS_d^2} = a + b + c + \frac{P_A}{\gamma} + \frac{Q^2}{2gS_D^2} \qquad \Rightarrow \qquad P_A = -37757.43\ \text{Pa}$$

Esercizio N.11

Il serbatoio rappresentato nella figura è libero di strisciare senza attrito sul piano d'appoggio. Nell'ipotesi di fluido perfetto e moto stazionario, calcolare la forza **F** misurata dal dinamometro D. Dati: d=0.05 m, a=7 m, C_C=0.61.



In virtù delle ipotesi del problema, la portata effluente dalla luce si ottiene a partire dall'espressione della velocità Torricelliana:

$$Q = U_T S_C = C_C S \sqrt{2ga} = 0.005\, m^3 s^{-1}$$

dove S ed S_C sono, rispettivamente, l'area della luce e l'area contratta.

La forza agente sulla molla si calcola applicando l'equazione di bilancio della quantità di moto in forma globale proiettata lungo l'asse orizzontale (assunto positivo verso destra). Il volume di controllo è quello tratteggiato nella figura. Il termine legato alla non stazionarietà del moto è identicamente nullo, così come la componente orizzontale della risultante delle forze di massa. Si ha, in definitiva:

$$\Pi_x = M_x$$

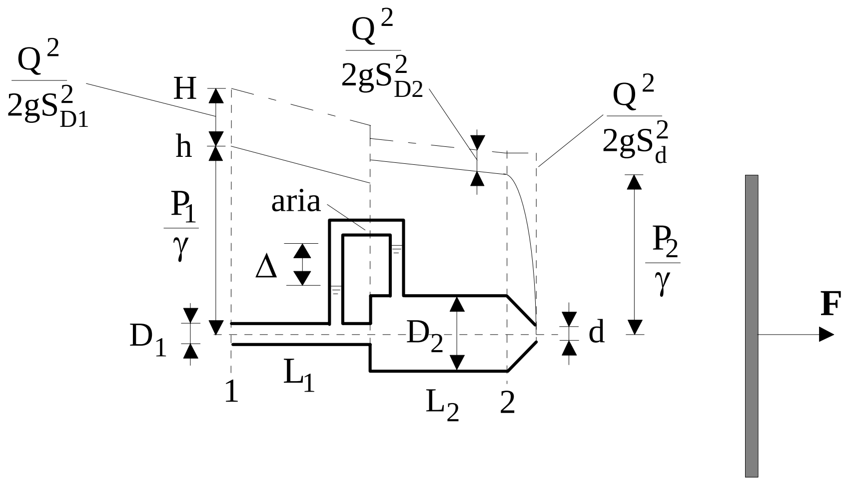
Le forze di superficie Π_x sono ovunque nulle tranne che in corrispondenza della parete di sinistra del serbatoio, mentre il flusso della quantità di moto è nullo salvo in corrispondenza della sezione contratta, dove, assumendo la normale positiva esterna al volume, ha segno positivo. Si ha:

$$\Pi_x = \rho \frac{Q^2}{S_C} = 20.88\, N$$

La forza incognita ha quindi modulo $F = -\Pi_x = -20.88\, N$, diretta da destra verso sinistra.

Esercizio N.12

Assegnate le caratteristiche geometriche e la scabrezza delle condotte e il modulo F della spinta che il getto d'acqua effluente dal bocchello terminale esercita sulla parete piana verticale, determinare la pressione nelle sezioni 1 e 2 ed il dislivello Δ misurato dal manometro differenziale. Dati: L_1=10 m, L_2=5 m, D_1=0.15 m; D_2=0.2 m, d=0.1 m, $\gamma(D_1)=52.1, \gamma(D_2)=11.2$, F=1500 N, C_C=0.61.



Noto il modulo F della spinta dinamica esercitata dal getto sulla parete, si determina la portata Q fluente nella condotta. Detta $S_d = \pi d^2/4$ l'area del bocchello, si ha:

$$F = \rho \frac{Q^2}{C_C S_d} \qquad \Rightarrow \qquad Q = \sqrt{\frac{FC_C\left(\pi d^2/4\right)}{\rho}} = 0.085\,\mathrm{m^3 s^{-1}}$$

La pressione nella sezione 2 si ottiene applicando il teorema di Bernoulli tra la sezione contratta del getto e la sezione 2, nell'ipotesi che le perdite di carico (concentrate e distribuite) nel tratto convergente siano trascurabili. Detta $S_{D2} = \pi D_2^2/4$ l'area del condotto di diametro D_2, si ottiene:

$$H_2 = \frac{P_2}{\gamma} + \frac{Q^2}{2gS_{D2}^2} = \frac{Q^2}{2gC_C^2 S_d^2} = H_d \qquad \Rightarrow \qquad P_2 = 153940.29\ \mathrm{Pa}$$

La pressione nella sezione 1 si ricava mediante l'equazione di conservazione dell'energia, ove compaiono i termini legati alle dissipazioni (concentrate e distribuite). In particolare, vanno considerate le perdite distribuite lungo le condotte 1 e 2 e la perdita di carico concentrata dovuta al brusco allargamento (Borda). Si ha:

$$H_1 = \left(\frac{P_1}{\gamma} + \frac{Q^2}{2gS_{D1}^2}\right) = \left(\frac{P_2}{\gamma} + \frac{Q^2}{2gS_{D2}^2}\right) + \gamma(D_1)L_1Q^2 + \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{S_{D1}} - \frac{1}{S_{D2}}\right)^2 + \gamma(D_2)L_2Q^2 = 20.45\,\mathrm{m}$$

e quindi:

$$P_1 = \gamma\left(H_1 - \frac{Q^2}{2gS_{D1}^2}\right) = 189038.7\ \text{Pa}$$

Nel calcolo del dislivello Δ misurato dal manometro differenziale è necessario tenere conto della perdita di carico localizzata (Borda) in corrispondenza del brusco allargamento di sezione. Detta P_M la pressione in corrispondenza della presa di pressione di monte e P_V quella della presa di pressione di valle, si ricava:

$$\frac{P_M}{\gamma} + \frac{Q^2}{2gS_{D1}^2} = \frac{P_V}{\gamma} + \frac{Q^2}{2gS_{D2}^2} + \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{S_{D1}} - \frac{1}{S_{D2}}\right)^2$$

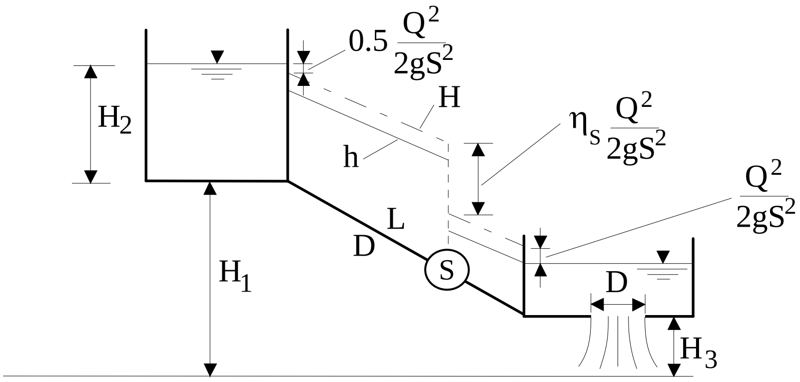
e quindi:

$$\Delta h = h_V - h_M = \frac{Q^2}{2g}\left[\left(\frac{1}{S_{D1}^2} - \frac{1}{S_{D2}^2}\right) - \left(\frac{1}{S_{D1}} - \frac{1}{S_{D2}}\right)^2\right] = \frac{\gamma - \gamma_m}{\gamma}\Delta \cong \Delta \qquad \Rightarrow \qquad \Delta = 0.046\ \text{m}$$

avendo considerato il peso specifico del fluido manometrico (aria) trascurabile rispetto a quello dell'acqua.

Esercizio N.13

Dato il sistema riportato in figura, calcolare il coefficiente di perdita concentrata η_s della saracinesca S affinché la portata scaricata dal foro circolare (di diametro D e coefficiente di efflusso μ) posto sul fondo del serbatoio di valle sia pari a Q. Dati: H_1=20 m, H_2=1 m, H_3=2m, D=0.3 m, L=300 m, K_S=90 $m^{1/3}s^{-1}$, μ=0.65, Q=0.2 m^3s^{-1}.



Ipotizzando la stazionarietà del moto, la portata scaricata dalla luce di fondo del serbatoio di valle coincide con la portata fluente nella condotta. Indicando con Δz il battente della luce di fondo e con $S=\left(\pi D^2/4\right)$ l'area della luce stessa, la portata effluente dalla luce è pari a:

$$Q=\mu S\sqrt{2g\Delta z} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta z=\frac{Q^2}{\mu^2\, 2gS^2}=0.97\ \mathrm{m}$$

Il coefficiente η_S si ottiene mediante l'equazione dell'energia relativa al tratto compreso tra i due serbatoi:

$$\left(H_1+H_2\right)-\left(H_3+\Delta z\right)=0.5\frac{Q^2}{2gS^2}+\frac{10.3}{K_S^2D^{1/3}}\frac{Q^2}{D^5}L+\eta_S\frac{Q^2}{2gS^2}+\frac{Q^2}{2gS^2}$$

e quindi:

$$\eta_S=20.15$$